abi-kurs.de

Kombinatorik

Alle Abiaufgaben

2021 B

3 **1** An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen:

$$P(A)=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^4};\ P(B)=\frac{6}{6^4}$$

2020 B

1 An dem Turnier nehmen neun Mannschaften teil. Die Mannschaften bestehen jeweils aus Jungen und Mädchen, wobei zwei Drittel aller mitspielenden Kinder männlich sind.

3 **a)** Die drei Spielführerinnen und die sechs Spielführer der Fußballmannschaften stellen sich in einer Reihe für ein Foto auf. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der neun Kinder, wenn die drei Spielführerinnen nebeneinanderstehen sollen.

2019 A

1 Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“; die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

2 **a)** Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

3 **b)** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

2018 B

2 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

2 **a)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt.

2017 A

1 Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

2 **a)** Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

1 **b)** Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

2 **c)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50%. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50% war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50% sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

2 **d)** Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

2017 B

2 In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

3 **a)** Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

α) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ **β)** $\binom{20}{4}$

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

2016 A

2 An einem P-Seminar nehmen acht Mädchen und sechs Jungen teil, darunter Anna und Tobias. Für eine Präsentation wird per Los aus den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Team aus vier Personen zusammengestellt.

3 **a)** Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden kann.
A: „Anna und Tobias gehören dem Team an.“
B: „Das Team besteht aus gleich vielen Mädchen und Jungen.“

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet werden kann:

$$\frac{\binom{14}{4}-\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$$

2015 A

2 Ein Moderator lädt zu seiner Talkshow drei Politiker, eine Journalistin und zwei Mitglieder einer Bürgerinitiative ein. Für die Diskussionsrunde ist eine halbkreisförmige Sitzordnung vorgesehen, bei der nach den Personen unterschieden wird und der Moderator den mittleren Platz einnimmt.

1 **a)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der möglichen Sitzordnungen berechnet werden kann, wenn keine weiteren Einschränkungen berücksichtigt werden.

4 **b)** Der Sender hat festgelegt, dass unmittelbar neben dem Moderator auf einer Seite die Journalistin und auf der anderen Seite einer der Politiker sitzen soll. Berechnen Sie unter Berücksichtigung dieser weiteren Einschränkung die Anzahl der möglichen Sitzordnungen.

2014 B

1 In einem Supermarkt erhalten Kunden abhängig vom Wert ihres Einkaufs eine bestimmte Anzahl von Päckchen mit Tierbildern, die in ein Sammelalbum eingeklebt werden können. Jedes Päckchen enthält fünf Bilder. Im Sammelalbum sind Plätze für insgesamt 200 verschiedene Bilder vorgesehen. Die Bilder werden jeweils in großer Stückzahl mit der gleichen Häufigkeit produziert und auf die Päckchen zufällig verteilt, wobei sich die Bilder in einem Päckchen nicht unterscheiden müssen.

2 **a)** Begründen Sie, dass der Term $\frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf verschiedene Tierbilder befinden.

3 **b)** Einem Jungen fehlen in seinem Sammelalbum noch 15 Bilder. Er geht mit seiner Mutter zum Einkaufen und erhält anschließend zwei Päckchen mit Tierbildern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Päckchen nur Bilder enthalten, die der Junge bereits in seinem Sammelalbum hat.

2012

2 Aus dem Bewerberfeld werden zwanzig weibliche und zehn männliche Personen zu einem Casting eingeladen, das in zwei Gruppen durchgeführt wird. Fünfzehn der Eingeladenen werden für die erste Gruppe zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die erste Gruppe zehn weibliche und fünf männliche Personen ausgewählt werden, wird mit p bezeichnet.

2 **a)** Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass p nicht durch den Term $\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ beschrieben wird.

4 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p mithilfe eines geeigneten Terms.

LÖSUNGEN

2021

a) Alle Familien gehen zu unterschiedlichen Kassen
b) Alle Familien gehen zur selben Kasse

2020

1. a) Die k=3 Mädchen haben auf den n=9 Plätzen n-k+1 = 9-3+1 = 7 Möglichkeiten, nebeneinanderzustehen:
 oooxxxxxx xoooxxxxx xxoooxxxx xxxoooxxx xxxxoooxx xxxxxooox xxxxxxooo
Die Mädchen untereinander können auf 3! Arten an geordnet werden, die Jungen auf 6! Arten.
Für die gesamte Anzahl der möglichen Aufstellungen multiplizieren wir alle 3 Werte: $7 \cdot 3! \cdot 6! = 30\,240$

b) Max geht vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ aus und erhält:
P(Ziehen mit Zurücklegen) $= \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = B\left(10; \frac{2}{3}; 5\right) = 0{,}13656\ldots$
Da jedoch jede Spielerin und jeder Spieler nur einmal ausgelost werden kann (und dann nicht zurückgelegt wird), ergibt sich die richtige Wahrscheinlichkeit durch „Ziehen ohne Zurücklegen“, also „Gute & Schlechte“ bzw. die Lotto-Formel. Sinnvolle Annahme: Jede Mannschaft besteht aus 11 Spielern, bei 9 Mannschaften wird also unter 99 Spielern ausgelost, von denen 66 Jungen und 33 Mädchen sind.
P(Ziehen ohne Zurücklegen) $= \frac{\binom{66}{5} \cdot \binom{33}{5}}{\binom{99}{10}} = 0{,}13614\ldots$
Die beiden Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich nur minimal.

2019

1. Es gilt: $P(0) = P(1) = P(2) = \frac{1}{5} = 0{,}2$ und $P(9) = \frac{2}{5} = 0{,}4$

a) $P(2019) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}0032 = 0{,}32\ \%$

b) Die Summe „mindestens 11“ kann erzielt werden durch die Ergebnisse 29, 92 und 99:
$P(29; 92; 99) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}32 = 32\ \%$

2018

2. Die Angabe lässt sich erweitern zu:

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°
Wahrscheinlichkeit	$\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$	$\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$	$\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$

a) Die drei verschiedenen Farben lassen sich auf 3! = 3 ⍰ 2 ⍰ 1 = 6 Arten anordnen.
Damit ergibt sich:
P(drei verschiedene Farben) $= 3! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

2017 A

1. a) $P = (1 - p)^7$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass siebenmal hintereinander beim Drehen des Glücksrads „nicht blau" getroffen wird.

   b) $P = \binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$

   c) Die Aussage von Felix ist falsch. Die Angabe P(„gelb") = 50 % besagt nur, dass bei jeder Drehung die Chance für „gelb" stets 50 % beträgt bzw. dass bei „unendlich vielen" Drehungen „gelb" bei der Hälfte aller Drehungen getroffen wird. Das muss jedoch nicht bei den ersten 200 Drehungen der Fall sein. Dennoch beträgt die Chance für „gelb" bei jeder Drehung stets 50 %.

   d) Da die Farbe Blau nicht vorkommen soll, bleiben nur „gelb" (g) und „rot" (r) für die vier Drehungen.

   Explizit:
   gggg, gggr, ggrg, grgg, rggg, ggrr, grgr, grrg,
   rggr, rgrg, rrgg, grrr, rgrr, rrgr, rrrg, rrrr

   Oder rechnerisch:

   kein r: $\binom{4}{0} = 1$

   ein r: $\binom{4}{1} = 4$

   zwei r: $\binom{4}{2} = 6$

   drei r: $\binom{4}{3} = 4$

   vier r: $\binom{4}{4} = 1$

   Es gibt also 16 mögliche Ergebnisse.

2017 B

2. a)

alpha: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 20 Parkplätze zu besetzen (oder die 4 Autos zu parken), wenn die Parkplätze nacheinander besetzt werden / die Autos nacheinander geparkt werden / die Autos unterschieden werden?

beta: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 20 Parkplätze zu besetzen (oder die 4 Autos zu parken), wenn die Parkplätze gleichzeitig besetzt werden / die Autos gleichzeitig geparkt werden / die Autos nicht unterschieden werden?

2016

2. a) $P(A) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{14}{4}}$ $P(B) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{14}{4}}$

   b) $\frac{\binom{14}{4} - \binom{6}{4}}{\binom{14}{4}} = \frac{\binom{14}{4}}{\binom{14}{4}} - \frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}} = 1 - \frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$

Das Team besteht nicht nur aus Jungen (oder: Im Team ist mindestens ein Mädchen).

2015

2. a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

   b) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4! = 144$

2014

1. a) Die Angabe besagt, dass die Bilder in großer Stückzahl produziert werden. Das bedeutet, dass jedes Päckchen völlig beliebig mit 5 der 200 Bilder bestückt werden kann, da für jedes einzelne Bild stets alle 200 Möglichkeiten bestehen. Auch besitzt jedes Bild laut Angabe die gleiche Wahrscheinlichkeit. Die Laplace-Annahme ist somit erfüllt. Daher gilt:

$$P = \frac{\text{Anzahl aller für das Ereignis günstigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Im gegebenen Term $\frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$ gibt der Nenner die Anzahl der Möglichkeiten an, fünfmal hintereinander ein Bild zu wählen, wobei jedes Mal 200 verschiedene Bilder zur Verfügung stehen.
Der Zähler gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, fünfmal hintereinander ein jeweils anderes Bild zu wählen. Beim ersten Ziehen gibt es 200 verschiedene Bilder, beim zweiten Ziehen nur noch 199, beim dritten Ziehen nur noch 198 usw.
Der Term gibt somit die Wahrscheinlichkeit an, beim fünfmaligen Ziehen (Füllung eines Päckchens) fünf unterschiedliche Bilder zu erhalten.

   b) Der Junge erhält zwei Päckchen, also zehn Bilder. Da ihm noch 15 Bilder fehlen, hat er bereits 200 – 15 = 185 Bilder in seinem Album.

$$P = \left(\frac{185}{200}\right)^{10} \approx 0{,}4586 = 45{,}86\,\%$$

2012

2. a) Der Term $\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ entspricht einem Ziehen **mit** Zurücklegen (siehe Merkhilfe). Die Urne, aus der 15-mal mit Zurücklegen gezogen wird, besitzt einen Trefferanteil von einem Drittel. Es sollen genau 5 Treffer erzielt werden.

   Zwar ist der Anteil der männlichen Personen hier ein Drittel (20 weibliche und 10 männliche Personen) und es sollen auch 5 männliche Personen ausgewählt werden, aber jeder Bewerber kann nur höchstens einmal teilnehmen. Es handelt sich beim Casting also um ein Ziehen **ohne** Zurücklegen.

   b) $p = \frac{\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{5}}{\binom{30}{15}} = \frac{184\,756 \cdot 252}{155\,117\,520} \approx 0{,}30015 = 30{,}015\,\%$ (siehe Merkhilfe)