abi-kurs.de

Cheat Sheet

Analytische Geometrie

Rechnen mit Vektoren

Richtungsvektoren (von A nach B)

Formel: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

Länge eines Vektors - Abstand zweier Punkte

Formel: $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$ bzw. $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}|$

Mittelpunkt einer Strecke

Formel: $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$

Aufstellen einer Geradengleichung

Formel: $g: \vec{x} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{u}$

Skalarprodukt

Formel: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Skalarprodukt = 0 >>> Vektoren stehen aufeinander senkrecht

Vektorprodukt und Normalenvektor

- Das Vektorprodukt zweier (linear unabhängiger) Vektoren liefert ihren Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
- Er steht auf beiden Vektoren senkrecht. Berechnung von $\vec{n}$ siehe Merkhilfe.

Spatprodukt

- Das Spatprodukt von 3 (linear unabhängigen) Vektoren $\vec{a},\ \vec{b}, und\ \vec{c}$ liefert den Inhalt des durch sie aufgespannten Spats: $S = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$

Flächen- und Volumenberechnungen

Volumen eines Spats	$V = \|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\|$
Volumen eines Prismas	$V = \frac{1}{2} \cdot \|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\|$
Volumen einer 3-seitigen Pyramide	$V = \frac{1}{6} \cdot \|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\|$
Volumen <u>jeder</u> Pyramide	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Linear abhängige und unabhängige Vektoren

Zwei Vektoren sind linear **unabhängig**, wenn ein Vektor (Wert in jeder Zeile) kein Vielfaches des anderen Vektors ist. Linear <u>ab</u>hängige Vektoren sind parallel (echt parallel oder identisch).

Drei Vektoren sind linear **unabhängig**, wenn keiner der Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors ist – und sich gleichzeitig keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \neq \vec{c}$

Berechnungen an Kreis und Kugel

Formel	$(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2$ (gilt für Kreis und Kugel, M = Mittelpunkt, r = Radius)
Kreis	$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$
Kugel	$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Gegenseitige Lage von Geraden

Echt parallele oder identische Geraden

- 2 Gerade sind echt parallel (oder identisch), wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.
- Sie sind zusätzlich identisch, wenn der Aufpunkt der einen auf der anderen Geraden liegt.
- Punktprobe: Zum Überprüfen setzt man diesen Aufpunkt gleich der Gleichung der anderen Geraden

Windschiefe oder sich schneidende Geraden

- Überprüfen der Richtungsvektoren, um zu entscheiden, dass die Geraden nicht parallel sind
- Geradengleichungen gleich setzen, um zu überprüfen, ob ein Schnittpunkt vorliegt oder nicht (windschief)

Ebenengleichungen – aufstellen und umwandeln

Ebenengleichung aus 3 Punkten

- 2 Richtungsvektoren (aus je 2 Punkten) bilden – und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- $\vec{n}$ zum Aufstellen einer Ebenengleichung in Normalenform verwenden: $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$
- Einen der gegebenen Punkte in E einsetzen, um n_0 zu berechnen

Ebenengleichung aus Punkt & Gerade

- Den 1. Richtungsvektor aus dem gegebenen Punkt und dem Aufpunkt der Geraden bilden, als 2. Vektor den Richtungsvektor der Geraden verwenden – und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- Den gegebenen Punkt (oder den Aufpunkt der Geraden) in E einsetzen, um n_0 zu berechnen

Ebenengleichung aus 2 parallelen Geraden

- Den 1. Richtungsvektor aus den beiden Aufpunkten der Geraden bilden, als 2. Vektor den Richtungsvektor einer der Geraden (beliebig) verwenden – und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- Einen der Aufpunkte der Geraden in E einsetzen, um n_0 zu berechnen

Parameterform (PF) in Normalform (NF) umwandeln

- Die Richtungsvektoren der Ebene in PF verwenden und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- Den Aufpunkt (der Ebene in PF) in die Ebene in NF einsetzen, um n_0 zu berechnen

NF in PF umwandeln

- Die Ebenengleichung nach einer der Koordinaten (x_1, x_2, x_3) auflösen (je nachdem, was am einfachsten ist)
- Falls nach x_2 aufgelöst wurde, in dieser Gleichung x_1 durch λ und x_3 durch μ ersetzen (oder analog)
- 3 Gleichungen aufstellen – für x_1, x_2 und x_3 – und dabei jeweils 0 für die fehlenden Teile einsetzen
- Aus diesen die Ebenengleichung in PF bilden

Abstandsberechnungen

Abstand Punkt > Punkt

Betrag des Vektors $|\overrightarrow{AB}|$

Abstand Punkt > Ebene

Berechnung mit der Hesse'schen Normalenform (HNF)

Abstand Punkt > Gerade

Berechnung mit einer Hilfsebene, die den Richtungsvektor der Geraden als Normalvektor hat – und P enthält

- Hilfsebene aufstellen mit Richtungsvektor als Normalenvektor, P einsetzen, um n_0 zu finden

Hilfsebene und Gerade schneiden, um den Lotfußpunkt F zu finden

- Gerade in 3 Gleichungen aufteilen, x_1, x_2, x_3 in E einsetzen
- Für Lotfußpunkt μ in g einsetzen
- $|\overrightarrow{PF}|$ ist der Abstand von P zu F – und damit von P zur Geraden g

Abstand Gerade > Gerade (parallel)

Siehe „Abstand Punkt > Gerade" – mit dem Aufpunkt der einen und der Gleichung der anderen Geraden

Abstand Gerade > Gerade (windschief)

- Ebene aufstellen, die g enthält und parallel zu h ist (also den Richtungsvektor von h nutzen)
- Aufpunkt einsetzen und n_0 berechnen

Abstand Gerade > Ebene (parallel)

Siehe „Abstand Punkt > Gerade" – mit dem Aufpunkt der Geraden und der Hesse'schen NF der Ebene

Abstand Ebene > Ebene (parallel)

- Benötigt wird eine Ebene in PF, eine in NF (notfalls eine Ebene umwandeln, siehe oben)
- Aufpunkt der in PF gegebenen Ebene in die Hesse'sche NF der anderen Ebene einsetzen

Schnittpunkte und Schnittgeraden

Schnittgerade von zwei Ebenen (in NF und PF)

- In PF gegebene Ebene in 3 Gleichungen (x_1, x_2 und x_3) aufteilen und in die NF der anderen Ebene einsetzen
  - Parameter λ und μ fallen weg: a) falsches Ergebnis (z.B. 3 = 8) ⇨ Ebenen parallel
    b) wahres Ergebnis, z.B. (7 = 7) ⇨ Ebenen identisch
  - Parameter λ und/oder μ bleiben: Ergebnis nach einem Parameter auflösen und in PF einsetzen ⇨ Ergebnis ist die Schnittgerade

Schnittgerade von zwei Ebenen (beide in NF)

- Möglichkeit 1
  - Eine der Ebenen umwandeln in PF (siehe oben „NF in PF umwandeln", S. 3)
  - Dann PF in NF einsetzen (siehe oben „Schnittgerade von zwei Ebenen (in NF und PF)")
- Möglichkeit 2
  - Mit den beiden Ebenen in NF ein lineares Gleichungssystem (GLS) aufstellen

- Da das GLS unterbestimmt ist (3 Unbekannte, aber nur 2 Gleichungen) ⇨ Eine der Unbekannten (hier x_2) durch einen Parameter (z. B. λ) ersetzen ⇨ Dieser bleibt am Schluss übrig für die Geradengleichung
- Im GLS zuerst eine (hier x_1), dann die andere Unbekannte (hier x_3) eliminieren und jeweils nach der verbliebenen auflösen, sowie die dritte (hier x_2) überall durch λ ersetzen
- Alle drei Unbekannten untereinander schreiben und daraus eine Geradengleichung bilden

Spurpunkte und Spurgeraden

Spurpunkte einer Ebene (auf den Achsen)

- Spurpunkt auf der x_1-Achse: x_2 und $x_3 = 0$ setzen
- Spurpunkt auf der x_2-Achse: x_1 und $x_3 = 0$ setzen
- Spurpunkt auf der x_3-Achse: x_1 und $x_2 = 0$ setzen

Spurgeraden einer Ebene (zwischen den Achsen)

- Spurgeraden sind die Verbindungsgeraden der Spurpunkte
- Spurpunkte berechnen (siehe oben) und aus jeweils 2 Punkten eine Geradengleichung aufstellen

Spurpunkte einer Geraden (mit den Koordinatenebenen)

- In den Koordinatenebenen ist jeweils eine Koordinate (x_1, x_2 oder x_3) = 0
- Diese Koordinate = 0 setzen und nach dem Parameter (z.B. µ) auflösen
- Das Ergebnis in den anderen beiden Koordinaten für µ einsetzen
- Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$ setzen
- Schnittpunkt mit der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$ setzen
- Schnittpunkt mit der x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$ setzen

Schnittwinkel berechnen

Gleiche Objekte (Ebene-Ebene, Gerade-Gerade)
Verwende **cos α**

Formel: $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Formel: $\cos\alpha_{E1,E2} = \frac{\vec{n_1} \circ \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$

Ungleiche Objekte (Ebene-Gerade)
Verwende **sin α**

Formel: $\sin\alpha_{E,g} = \frac{\vec{n} \circ \vec{g}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{g}|}$