abi-kurs.de

Stochastik-Skript

Cheat-Sheet
Stochastik

abi-kurs.de

Stochastik-Skript

Cheat-Sheet Stochastik

Additionssatz

Die Wahrscheinlichkeit von, dass A oder B eintritt, ist die Wahrscheinlichkeit für A plus die Wahrscheinlichkeit für B, minus die Wahrscheinlichkeit, dass beide eintreten.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch <u>un</u>abhängig, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

bzw. stochastisch <u>ab</u>hängig, wenn gilt:

$$\mathrm{P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)}$$

Lösung solcher Aufgaben: Meist am besten mit einer Vierfelder-Tafel, teilweise auch mit Baum.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_B(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(B)}$$

Die Bedingung (das Ereignis auf der linken Seite UNTEN) steht auch auf der rechten Seite UNTEN.

Baumdiagramme

- Die Wahr'keiten aller Teiläste nach einer Verzweigung müssen sich zu 1 addieren
- Alle Endwahr'keiten müssen sich zu 1 addieren
- Die Endwahr'keiten errechnen sich durch multiplizieren aller Wahr'keiten entlang des Pfades
- Anwendbar beim Ziehen MIT Zurücklegen (Wahr'keiten bleiben bei jedem Schritt gleich) sowie beim Ziehen OHNE Zurücklegen (Wahr'keiten ändern sich bei jedem Schritt)

Bernoulli und Binomialverteilung (Ziehen MIT Zurücklegen)

- Nur beim Ziehen MIT Zurücklegen bzw. wenn jedes Ergebnis GLEICH wahrscheinlich ist

Bernoulli-Formel: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

- Tipp: p und (1-p) addieren sich immer zu 1, k und (n-k) im Exponenten immer zu n
- P(kein Treffer) = P(X=0)
- P(mind. 1 Treffer) = 1 – P(kein Treffer) = 1 – P(X=0) [Gegenereignis]
- P(höchst. 1 Treffer) = P(0 Treffer) + P (1 Treffer) = P(X=0) + P(X=1)

- Bsp: n = 5; $p_{Treffer}$ = 0,3; Gesucht: P(genau 4 Treffer) = $P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}3^4 \cdot (0{,}7)^1$ = 0,02835
- P(höchstens 4 Treffer) = $P(X \leq 4)$ = siehe Tafelwerk kumulativer Teil = 0,99757
  = 1 – P(Geg.ereignis) = 1 – P(genau 5 Treffer) = 1 – 0,00243 = 0,99757
- P(mind. 2 Treffer) = $P(X \geq 2)$ = 1 – P(Geg.ereignis) = 1 – $P(X \leq 1)$ = 1 – 0,52822 = 0,47178

abi-kurs.de

Stochastik-Skript

Cheat-Sheet Stochastik

3-Mindestens-Aufgaben (Hasenschuss)

Hinweis: Nicht immer taucht dreimal das Wort "mindestens" auf!

Gesucht ist $p_{Treffer}$ oder die Anzahl der Versuche n. Nach diesen ist unten stehende Formel aufzulösen. $(1 - p_{Treffer})$ ist dabei die Wahrscheinlichkeit, einmal NICHT zu treffen.

$$\boxed{P(\text{mind. 1 Treffer}) = [\text{Geg.ereignis}] = 1 - P(\text{kein Treffer}) = 1 - (1 - p_{Treffer})^n \geq P}$$

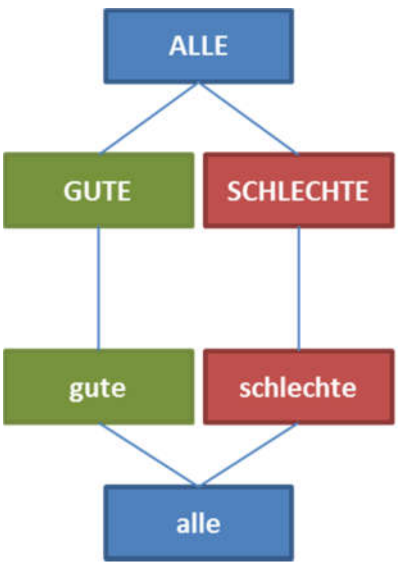
Die Formel aufgelöst nach n: $n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p_{Treffer})}$

Die Formel aufgelöst nach p: $p \geq 1 - \sqrt[n]{1-P}$

Ziehen mit einem Griff (Ziehen OHNE Zurücklegen)

Die Untersuchungsgegenstände ("ALLE") werden aufgeteilt in "GUTE" und "SCHLECHTE" – daraus zieht man mehrere Objekte ("alle"), die wiederum unterteilt sind in die, die uns interessieren ("gute") und die restlichen, die wir ziehen ("schlechte").

Schema



Formel

$$P(\text{gesucht}) = \frac{\binom{GUTE}{gute} \cdot \binom{SCHLECHTE}{schlechte}}{\binom{ALLE}{alle}}$$

Beispiel: Lotto 6 aus 49, Wahrscheinlichkeit für "4 Richtige"
Es gibt 49 Kugeln (ALLE), davon 6, die ausgelost werden (GUTE), und 43, die nicht ausgelost werden (SCHLECHTE)
Man kreuzt 6 Felder an (alle), davon suchen wir 4 Richtige (gute), es verbleiben noch 2, die wir zwar angekreuzt haben, die jedoch nicht gezogen wurden (schlechte).

Beispiel: Bierkasten, Wahrscheinlichkeit für 3 Weißbier
Ein Kasten Bier enthält 20 Flaschen (ALLE),
davon 5 Weißbier (GUTE) und 15 Helle (SCHLECHTE).
Es werden 7 Flaschen gezogen (alle), gesucht ist die Wahr'keit, dass 3 davon Weißbier sind (gute), demnach müssen die 4 restlichen Helle sein (schlechte).

Zufallsgrößen, Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert:	$E(X) = \mu = \Sigma\, x_i \cdot p_i$	(jeweils xi · pi berechnen & davon die Summe bilden)
Varianz:	$VAR(X) = \Sigma\, x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$	(oder aufwändiger: $\Sigma\, (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$)
Standardabweichung:	$\sigma = \sqrt{VAR(X)}$	

abi-kurs.de

Stochastik-Skript

Cheat-Sheet Stochastik

Kombinatorik-Formeln

Variations-/Kombinationsformeln (aus n Elementen werden k verteilt/ausgewählt)

	MIT Zurücklegen	OHNE Zurücklegen
MIT Beachtung der Reihenfolge	n^k Anzahl möglicher Ergebnisse beim 3-maligen Werfen eines Würfels = 6^3 = 216 {111, 112, 113, … , 664, 665, 666} Anzahl zweistelliger Kombinationen aus den Buchstaben A, B und C = 3^2 = 9 {AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC}	$\frac{n!}{(n-k)!}$ (einfacher: n·(n-1)·(n-2)·…) Bei einem Wettbewerb mit 20 Teilnehmern gibt es je einen Gold-, Silber- und Bronze-Gewinner, also 20·19·18 bzw. $\frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 6840$ Möglichkeiten
OHNE Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$ Um k=2 aus n=3 Kugeln auszuwählen, egal in welcher Reihenfolge, aber mit Zurücklegen, gibt es $\binom{3+2-1}{2} = 6$ Möglichkeiten: {11, 12, 13, 22, 23, 33}	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$ Um 2 aus 3 Kugeln auszuwählen, egal in welcher Reihenfolge und ohne Zurücklegen, gibt es $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten: {12, 13, 23} (12 entspricht 21, etc.) Um aus 6 Frauen und 4 Männern eine Gruppe mit 5 Personen auszuwählen, davon 3 Frauen, gibt es $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten

Permutations-Formeln (alle n Elemente werden verteilt/ausgewählt)

n (unterscheidbare) Dinge anordnen, ohne Wiederholung: n!

Bsp: 3 (unterscheidbare) Farben anordnen: 3! = 3 · 2 · 1 = 6 Möglichkeiten

Bsp: 7 (unterscheidbare) Vorspeisen, 5 Hauptgerichte und 3 Desserts anordnen: 7 · 5 · 3 Möglichkeiten

k (nicht unterscheidbare) Dinge nebeneinander (in einem Block) auf n Plätze verteilen: (n – k + 1)

Bsp: Eine Gruppe 10 (nicht unterscheidbarer) Personen auf eine Reihe mit 75 Plätzen verteilen = 75 – 10 + 1 = 66 Möglichkeiten

- MIT Zurücklegen: Die Person/Zahl/etc. darf **an allen Positionen** vorkommen
- OHNE Zurücklegen: Die Person/Zahl/etc. darf jeweils **nur 1x** vorkommen
- MIT Beachtung der Reihenfolge: 123, 132, 213, etc. werden als **getrennte** Ergebnisse gezählt
- OHNE Beachtung der Reihenfolge: 123, 132, 213, etc. werden als **ein** Ergebnis gezählt

- Ist eine ANZAHL gefragt? ⇨ einfach die o.g. Formeln verwenden
- Ist eine WAHRSCHEINLICHKEIT gefragt? ⇨ $P(Ereignis) = \frac{GÜNSTIG}{MÖGLICH}$ verwenden
  (hier müssen teilweise in Zähler und Nenner unterschiedliche Formeln verwendet werden)

Hypothesentest

Fehlerarten

	H_0 angenommen	**H_0 abgelehnt**
H_0 wahr	✓ (alles richtig gemacht)	✗ Fehler 1. Art (α-Fehler) (Signifikanzniveau)
H_0 falsch	✗ Fehler 2. Art (β -Fehler)	✓ (alles richtig gemacht)

Schema

1) Hypothese mit der kleineren Wahrscheinlichkeit steht auf der linken Seite des Schemas:

H_0: $p \leq 0{,}40$ | H_1: $p > 0{,}40$

|---| |---|

0 ($x \leq k$) k | k+1 ($X \geq k+1$) 200

2) Entscheidung und Wirklichkeit notieren: Aus dem Text heraus lesen, für welche Hypothese man sich **(irrtümlich) entscheidet (Entscheidung)** und welche stattdessen **wirklich gilt (Wirklichkeit)**.

Beispiel

Signifikanzniveau = 10% gegeben ⇨ Fehler 1. Art (H_0 wahr, wird aber abgelehnt)

Entscheidung: H_1 (da H_0 abgelehnt wird) ⇨ Man nimmt das X von H_1 ⇨ $X \geq k+1$
Wirklichkeit: H_0 (da H_0 wahr ist) ⇨ Man nimmt das p von H_0 ⇨ $p \leq 0{,}40$

3) Ansatz erstellen und auflösen: $P_{0,4}^{200}(X \geq k+1) \leq 10\%$ (Hier Lösung über Geg.ereignis wg. $X \geq k+1$)