

abi-kurs.de



Stochastik

Cheat-Sheet



Additionssatz

Die Wahrscheinlichkeit von, dass A oder B eintritt, ist die Wahrscheinlichkeit für A plus die Wahrscheinlichkeit für B, minus die Wahrscheinlichkeit, dass beide eintreten.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

bzw. stochastisch abhängig, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$$

Lösung solcher Aufgaben: Meist am besten mit einer Vierfelder-Tafel, teilweise auch mit Baum.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Bedingung (das Ereignis auf der linken Seite UNTEN) steht auch auf der rechten Seite UNTEN.

Baumdiagramme

- Die Wahr'keiten aller Teiläste nach einer Verzweigung müssen sich zu 1 addieren
- Alle Endwahr'keiten müssen sich zu 1 addieren
- Die Endwahr'keiten errechnen sich durch multiplizieren aller Wahr'keiten entlang des Pfades
- Anwendbar beim Ziehen MIT Zurücklegen (Wahr'keiten bleiben bei jedem Schritt gleich) sowie beim Ziehen OHNE Zurücklegen (Wahr'keiten ändern sich bei jedem Schritt)

Bernoulli und Binomialverteilung (Ziehen MIT Zurücklegen)

- Nur beim Ziehen MIT Zurücklegen bzw. wenn jedes Ergebnis GLEICH wahrscheinlich ist

$$\text{Bernoulli-Formel: } P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

- Tipp: p und (1-p) addieren sich immer zu 1, k und (n-k) im Exponenten immer zu n
- $P(\text{kein Treffer}) = P(X=0)$
- $P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer}) = 1 - P(X=0)$ [Gegenereignis]
- $P(\text{höchst. 1 Treffer}) = P(0 \text{ Treffer}) + P(1 \text{ Treffer}) = P(X=0) + P(X=1)$

- Bsp: $n = 5$; $p_{\text{Treffer}} = 0,3$; Gesucht: $P(\text{genau 4 Treffer}) = P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,3^4 \cdot (0,7)^1 = 0,02835$
- $P(\text{höchstens 4 Treffer}) = P(X \leq 4) = \text{siehe Tafelwerk kumulativer Teil} = 0,99757$
 $= 1 - P(\text{Geg.ereignis}) = 1 - P(\text{genau 5 Treffer}) = 1 - 0,00243 = 0,99757$
- $P(\text{mind. 2 Treffer}) = P(X \geq 2) = 1 - P(\text{Geg.ereignis}) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,52822 = 0,47178$



3-Mindestens-Aufgaben (Hasenschuss)

Hinweis: Nicht immer taucht dreimal das Wort "mindestens" auf!

Gesucht ist p_{Treffer} oder die Anzahl der Versuche n . Nach diesen ist unten stehende Formel aufzulösen. $(1 - p_{\text{Treffer}})$ ist dabei die Wahrscheinlichkeit, einmal NICHT zu treffen.

$$P(\text{mind. 1 Treffer}) = [\text{Geg.ereignis}] = 1 - P(\text{kein Treffer}) = 1 - (1 - p_{\text{Treffer}})^n \geq P$$

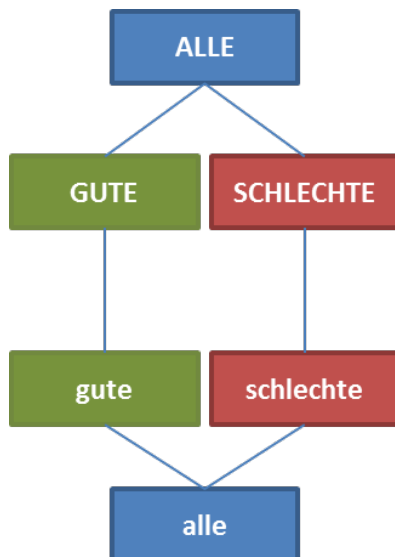
Die Formel aufgelöst nach n : $n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p_{\text{Treffer}})}$

Die Formel aufgelöst nach p : $p \geq 1 - \sqrt[n]{1-P}$

Ziehen mit einem Griff (Ziehen OHNE Zurücklegen)

Die Untersuchungsgegenstände ("ALLE") werden aufgeteilt in "GUTE" und "SCHLECHTE" – daraus zieht man mehrere Objekte ("alle"), die wiederum unterteilt sind in die, die uns interessieren ("gute") und die restlichen, die wir ziehen ("schlechte").

Schema



Formel

$$P(\text{gesucht}) = \frac{\binom{GUTE}{gute} \cdot \binom{SCHLECHTE}{schlechte}}{\binom{ALLE}{alle}}$$

Beispiel: Lotto 6 aus 49, Wahrscheinlichkeit für "4 Richtige"

Es gibt 49 Kugeln (ALLE), davon 6, die ausgelost werden (GUTE), und 43, die nicht ausgelost werden (SCHLECHTE)

Man kreuzt 6 Felder an (alle), davon suchen wir 4 Richtige (gute), es verbleiben noch 2, die wir zwar angekreuzt haben, die jedoch nicht gezogen wurden (schlechte).

Beispiel: Bierkasten, Wahrscheinlichkeit für 3 Weißbier

Ein Kasten Bier enthält 20 Flaschen (ALLE), davon 5 Weißbier (GUTE) und 15 Helle (SCHLECHTE).

Es werden 7 Flaschen gezogen (alle), gesucht ist die Wahr'keit, dass 3 davon Weißbier sind (gute), demnach müssen die 4 restlichen Helle sein (schlechte).

Zufallsgrößen, Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert: $E(X) = \mu = \sum x_i \cdot p_i$ - jeweils $x_i \cdot p_i$ berechnen & davon die Summe bilden

Varianz: $\text{VAR}(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$ - oder schneller: $\text{VAR}(X) = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\text{VAR}(X)}$

Bei binomialverteilten Zufallsgrößen gilt: $E(X) = \mu = n \cdot p$; $\text{VAR}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$



Kombinatorik

Variations-/Kombinationsformeln (aus n Elementen werden k verteilt/ausgewählt)		
	MIT Zurücklegen/Wdh.	OHNE Zurücklegen/Wdh.
<p>MIT Reihenfolge [besser: MIT Unterscheidbarkeit]</p>	<p>n^k</p> <p>n: Anzahl Möglichkeiten pro Versuch k: Anzahl Versuche</p> <p>Anzahl möglicher Ergebnisse beim 3-maligen Werfen (k=3) eines Würfels (mit n=6 verschiedenen Zahlen): M = $6^3 = 216$ Möglichkeiten $\Omega = \{111, 112, 113, \dots, 664, 665, 666\}$</p> <p>Anzahl zweistelliger Kombinationen aus den Buchstaben X, Y und Z, wenn jeder Buchstabe auch mehrfach vorkommen darf: M = $3^2 = 9$ Möglichkeiten. $\Omega = \{XX, XY, XZ, YX, YY, YZ, ZX, ZY, ZZ\}$</p>	<p>$\frac{n!}{(n-k)!}$ oder einfacher: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots$</p> <p>n: Anzahl Plätze, k: Anzahl Treffer</p> <p>Bei einem Pferderennen mit 20 Teilnehmern gibt es je einen Gold-, Silber- und Bronze-Gewinner, d.h. M = $20 \cdot 19 \cdot 18$ bzw. $\frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 6840$ Möglichkeiten</p> <p>Anzahl unterschiedlicher zweistelliger Kombinationen aus den Buchstaben A, B, C und D, wenn kein Buchstabe doppelt vorkommen darf: M = $4 \cdot 3 = 12$ bzw. $\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$ Möglichkeiten. $\Omega = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$</p>
<p>OHNE Reihenfolge [besser: OHNE Unterscheidbarkeit]</p>	<p>$\binom{n+k-1}{k}$</p> <p>n: Anzahl Möglichkeiten pro Versuch k: Anzahl Versuche</p> <p>Anzahl zweistelliger Kombinationen aus den Buchstaben X, Y und Z, wenn jeder Buchstabe auch mehrfach vorkommen darf, die Positionen aber nicht unterschieden werden: M = $\binom{3+2-1}{2} = 6$ Möglichkeiten: $\Omega = \{XX, XY, XZ, XX, YZ, ZZ\}$</p> <p>KOMMT IM ABI NICHT VOR!</p>	<p>$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$</p> <p>n: Anzahl Plätze, k: Anzahl Treffer</p> <p>Anzahl Möglichkeiten, k=2 (nicht unterscheidbare) rote Kugeln auf n=3 Plätze zu verteilen: M = $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten, $\Omega = \{RRX, RXR, XRR\}$</p> <p>Um aus 6 weiblichen und 4 männlichen Personen eine Gruppe mit 5 Personen auszuwählen, davon 3 weibliche, gibt es M = $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten</p> <p>Anzahl zweistelliger Kombinationen aus den Buchstaben X, Y und Z, wenn kein Buchstabe doppelt vorkommen darf und nicht zw. XY & YX, XZ & ZX sowie YZ & ZY unterschieden wird: M = $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten, $\Omega = \{XY, XZ, YZ\}$</p>
Permutations-Formeln (alle n Elemente werden verteilt/ausgewählt)		
<p>n (unterscheidbare) Dinge anordnen, ohne Wiederholung: n!</p> <p>Bsp: Drei unterscheidbare Kugeln (rot, grün, blau) in einer Reihe anordnen: M = $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten</p> <p>Bsp: Wie viele Kombinationen lassen sich aus den 4 Buchstaben ABER bilden, wenn jeder Buchstabe nur 1x vorkommen darf? M = $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten (ABER, ABRE, AEBR, AERB, ARBE, AREB, ...)</p>		
<p>k (nicht unterscheidbare) Dinge nebeneinander (in einem Block) auf n Plätze verteilen: $(n - k + 1)$</p> <p>Bsp: Eine Gruppe 10 (nicht unterscheidbarer) Personen auf eine Reihe mit 75 Plätzen verteilen: M = $75 - 10 + 1 = 66$ Möglichkeiten</p>		



Tipps zur Kombinatorik

- MIT Zurücklegen: Das Element (Person/Zahl/etc.) darf **mehrfach** vorkommen
- OHNE Zurücklegen: Das Element (Person/Zahl/etc.) darf jeweils **nur einmal** vorkommen
- MIT Unterscheidbarkeit (Reihenfolge): 123, 132, 213 werden als **getrennte** Ergebnisse gezählt
- OHNE Unterscheidbarkeit (Reihenfolge): 123, 132, 213 werden als **ein** Ergebnis gezählt
- Ist eine ANZAHL gefragt? \Rightarrow Einfach die o.g. Formeln verwenden
- Ist eine WAHRSCHEINLICHKEIT gefragt? $\Rightarrow P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{GÜNSTIGE}}{\text{MÖGLICHE}}$ verwenden
(hier müssen teilweise in Zähler und Nenner unterschiedliche Formeln verwendet werden)

Hypothesentest

Fehlerarten

	H_0 angenommen	H_0 abgelehnt
H_0 wahr	 (alles richtig gemacht)	 Fehler 1. Art (α -Fehler) (Signifikanzniveau)
H_0 falsch	 Fehler 2. Art (β -Fehler)	 (alles richtig gemacht)

Schema

1) Hypothese mit der kleineren Wahrscheinlichkeit steht auf der linken Seite des Schemas:



2) Entscheidung und Wirklichkeit notieren: Aus dem Text heraus lesen, für welche Hypothese man sich (**irrtümlich**) **entscheidet (Entscheidung)** und welche stattdessen **wirklich gilt (Wirklichkeit)**.

Beispiel

Signifikanzniveau = 10% gegeben \Rightarrow Fehler 1. Art (H_0 wahr, wird aber abgelehnt)

Entscheidung: H_1 (da H_0 abgelehnt wird) \Rightarrow Man nimmt das X von H_1 $\Rightarrow X \geq k+1$
 Wirklichkeit: H_0 (da H_0 wahr ist) \Rightarrow Man nimmt das p von H_0 $\Rightarrow p \leq 0,40$

3) Ansatz erstellen und auflösen: $P_{0,4}^{200}(X \geq k+1) \leq 10\%$ (Hier Lösung über Geg.ereignis wg. $X \geq k+1$)