Geometrie-Skript

Cheat Sheet
Analytische Geometrie

Inhalt

Rechnen mit Vektoren

Länge eines Vektors

Formel: $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Richtungsvektoren (von A nach B)

Formel: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

Beispiel: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abstand zweier Punkte

Formel: $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}|$

Beispiel: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 36 + 4} = \sqrt{44} \approx 6{,}6$

Mittelpunkt einer Strecke

Formel: $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$

Beispiel: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufstellen einer Geradengleichung

Formel: $g: \vec{x} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{u}$

Beispiel: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt wird hauptsächlich verwendet, um den Winkel zwischen 2 Vektoren zu bestimmen – oder um festzustellen, ob sie aufeinander senkrecht stehen (dann ist ihr Skalarprodukt = 0).

Formel: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{a} \circ \vec{b} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 3$

Vektorprodukt und Normalenvektor

- Das Vektorprodukt zweier (linear unabhängiger) Vektoren liefert ihren Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
- Er steht auf beiden Vektoren senkrecht. Berechnung von $\vec{n}$ siehe Merkhilfe.
- Sein Betrag liefert die Fläche des Parallelogramms/Dreiecks, das die Vektoren aufspannen
  $A_{Parallelogramm} = |\vec{n}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi \qquad A_{Dreieck} = \frac{1}{2}|\vec{n}| = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$
- Mit ihm kann die Normalform der Ebene durch die beiden Vektoren aufgestellt werden
  $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$

Spatprodukt

- Das Spatprodukt von 3 (linear unabhängigen) Vektoren $\vec{a},\ \vec{b}, und\ \vec{c}$ liefert den Inhalt des durch sie aufgespannten Spats
- Es besteht aus einem Vektor- und einem Skalarprodukt: $S = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$

Flächen- und Volumenberechnungen

Volumen eines Spats	$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$
Volumen eines Prismas	$V = \frac{1}{2} \cdot \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$
Volumen einer 3-seitigen Pyramide	$V = \frac{1}{6} \cdot \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$

Linear abhängige und unabhängige Vektoren

Zwei Vektoren sind linear **unabhängig**, wenn ein Vektor (Wert in jeder Zeile) kein Vielfaches des anderen Vektors ist. Linear abhängige Vektoren sind parallel (echt parallel oder identisch).

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; Überprüfung: $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} 3 = k \cdot (-1) \\ -6 = k \cdot 2\,; \\ 6 = k \cdot (-2) \end{matrix}$ $\begin{matrix} k = \frac{3}{-1} = -3 \\ k = -\frac{6}{2} = -3 \\ k = \frac{6}{-2} = -3 \end{matrix}$ ⇨ linear abhänig

Drei Vektoren sind linear **unabhängig**, wenn keiner der Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors ist – und sich gleichzeitig keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \neq \vec{c}$

Berechnungen an Kreis und Kugel

Formel $\left(\vec{X}-\vec{M}\right)^2 = r^2$ (gilt für Kreis und Kugel, M = Mittelpunkt, r = Radius)

Kreis $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

Kugel $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Beispiel Gegeben ist M(4/3/-1) und r = 5. Geben Sie die Kugelgleichung an.

$$\left(\vec{X} - \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}\right)^2 = 5^2 \qquad \text{bzw.} \qquad (x_1-4)^2 + (x_2-3)^2 + (x_3+1)^2 = 5^2$$

Beispiel Gegeben sind die Kugel K mit Mittelpunkt M(2/8/7) und Radius r = $3\sqrt{14}$
und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Schnittpunkte.

K aufstellen: $(x_1-2)^2 + (x_2-8)^2 + (x_3-7)^2 = (3\sqrt{14})^2$

g in K:

$$[(1+0\mu)-2]^2 + [(2+2\mu)-8]^2 + [(0-1\mu)-7]^2 = (3\sqrt{14})^2$$
$$[1-2]^2 + [2\mu-6]^2 + [-\mu-7]^2 = 126$$
$$1 + 4\mu^2 - 24\mu + 36 + \mu^2 + 14\mu + 49 = 126 \qquad |-126$$
$$5\mu^2 - 10\mu - 40 = 0 \qquad |:5$$
$$\mu^2 - 2\mu - 8 = 0 \qquad |\text{Mitternachtsformel}$$
$$\mu_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad \rightarrow \mu_1 = 4;\ \mu_2 = -2; \qquad |\mu \text{ in g liefert } S_1 \text{ und } S_2$$

S_1(1/10/-4); S_2(1/-2/2);

Gegenseitige Lage von Geraden

Echt parallele oder identische Geraden

2 Gerade sind echt parallel (oder identisch), wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0{,}5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0{,}5\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0{,}5\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow g \parallel h \text{ (parallel)}$$

Die Geraden sind also parallel. Sie sind zusätzlich identisch, wenn der Aufpunkt der einen auf der anderen Geraden liegt. Zum Überprüfen setzt man diesen Aufpunkt gleich der Gleichung der anderen Geraden:

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0{,}5\end{pmatrix} \text{ aufspalten in 3 Gleichungen } \begin{matrix}-1 = 8 + 3\mu\\ 0 = 6 + 2\mu \\ 0{,}5 = 2 + 0{,}5\mu\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\mu = -3\\ \mu = -3\\ \mu = -3\end{matrix} \Rightarrow g = h \text{ (identisch)}$$

Windschiefe oder sich schneidende Geraden

- Überprüfen der Richtungsvektoren, um zu entscheiden, dass die Geraden nicht parallel sind
- Geradengleichungen gleich setzen, um zu überprüfen, ob ein Schnittpunkt vorliegt oder nicht (windschief)

Ebenengleichungen – aufstellen und umwandeln

Ebenengleichung aus 3 Punkten

- 2 Richtungsvektoren (aus je 2 Punkten) bilden – und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- $\vec{n}$ zum Aufstellen einer Ebenengleichung in Normalenform verwenden: $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$
- Einen der gegebenen Punkte in E einsetzen, um n_0 zu berechnen

Ebenengleichung aus Punkt & Gerade

- Den 1. Richtungsvektor aus dem gegebenen Punkt und dem Aufpunkt der Geraden bilden, als 2. Vektor den Richtungsvektor der Geraden verwenden – und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- Den gegebenen Punkt (oder den Aufpunkt der Geraden) in E einsetzen, um n_0 zu berechnen

Ebenengleichung aus 2 parallelen Geraden

- Den 1. Richtungsvektor aus den beiden Aufpunkten der Geraden bilden, als 2. Vektor den Richtungsvektor einer der Geraden (beliebig) verwenden – und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- Einen der Aufpunkte der Geraden in E einsetzen, um n_0 zu berechnen

Parameterform (PF) in Normalform (NF) umwandeln

- Die Richtungsvektoren der Ebene in PF verwenden und deren Kreuzprodukt berechnen ⇨ dieses liefert $\vec{n}$
- Den Aufpunkt (der Ebene in PF) in die Ebene in NF einsetzen, um n_0 zu berechnen

NF in PF umwandeln

- Die Ebenengleichung nach einer der Koordinaten (x_1, x_2, x_3) auflösen (je nachdem, was am einfachsten ist)
- Falls nach x_2 aufgelöst wurde, in dieser Gleichung x_1 durch λ und x_3 durch μ ersetzen (oder analog)
- 3 Gleichungen aufstellen – für x_1, x_2 und x_3 – und dabei jeweils 0 für die fehlenden Teile einsetzen
- Aus diesen die Ebenengleichung in PF bilden

Beispiel: E: $2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4 = 0$

- Auflösen nach x_2: $x_2 = 4 - 2x_1 + 2x_3$ | mit $x_1 = \lambda$ und $x_3 = \mu$
- 3 Gleichungen aufstellen: $x_1 = 0 + \lambda + 0\mu$
  $x_2 = 4 - 2\lambda + 2\mu$
  $x_3 = 0 + 0\lambda + \mu$
- Ebenengleichung aufstellen: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstandsberechnungen

Abstand Punkt > Punkt

Geg: A(1/2/1), B(5/-2/2) $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{33}$

Abstand Punkt > Ebene

Geg: P(3/2/1) und E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

Berechnung mit der Hesse'schen Normalenform: d(P;E) = $\frac{|n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_0|}{|\vec{n}|}$ also $\frac{|P\ in\ E\ einsetzen|}{|\vec{n}|}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\left|\overrightarrow{n}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$ d(P;E) = $\frac{|1\cdot3-2\cdot2+2\cdot1-4|}{|3|} = \frac{|-3|}{|3|} = 1$

Abstand Punkt > Gerade

Geg: P(3/2/1) und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung mit einer Hilfsebene, die den Richtungsvektor der Geraden als Normalvektor hat – und P enthält

- Hilfsebene aufstellen mit $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor: E: $-2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + n_0 = 0$
- P einsetzen, um n_0 zu finden: $-2\cdot3 + 6\cdot2 + 2\cdot1 + n_0 = 0$ ⇨ $n_0 = -8$ ⇨ E: $-2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

Hilfsebene und Gerade schneiden, um den Lotfußpunkt F zu finden

- Gerade in 3 Gleichungen aufteilen: $x_1 = (3 - 2\mu)$; $x_2 = (-2 + 6\mu)$; $x_3 = (2 + 2\mu)$
- x_1, x_2, x_3 in E einsetzen: $-2(3 - 2\mu) + 6(-2 + 6\mu) + 2(2 + 2\mu) - 8 = 0$ und nach μ auflösen: $\mu = 0{,}5$
- Für Lotfußpunkt μ in g einsetzen: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⇨ $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\left|\overrightarrow{PF}\right|$ ist der Abstand von P zu F – und damit von P zur Geraden g: $\left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

Abstand Gerade > Gerade (parallel)

Siehe „Abstand Punkt > Gerade" – mit dem Aufpunkt der einen und der Gleichung der anderen Geraden

Abstand Gerade > Gerade (windschief)

Ebene aufstellen, die g enthält und parallel zu h ist (also den Richtungsvektor von h nutzen)

Geg: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ⇨ Umwandeln in NF: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ⇨ E: $8x_1 + x_2 + 5x_3 + n_0 = 0$

Aufpunkt einsetzen und n_0 berechnen: $8\cdot3 + (-2) + 5\cdot2 + n_0 = 0$ ⇨ $n_0 = -32$ ⇨ E: $8x_1 + x_2 + 5x_3 - 32 = 0$

Abstand Gerade > Ebene (parallel)

Siehe „Abstand Punkt > Gerade" – mit dem Aufpunkt der Geraden und der Hesse'schen NF der Ebene

Abstand Ebene > Ebene (parallel)

- Benötigt wird eine Ebene in PF, eine in NF (notfalls eine Ebene umwandeln, siehe oben)
- Aufpunkt der in PF gegebenen Ebene in die Hesse'sche NF der anderen Ebene einsetzen

Schnittpunkte und Schnittgeraden

Schnittgerade von zwei Ebenen (in NF und PF)

- In PF gegebene Ebene in 3 Gleichungen (x_1, x_2 und x_3) aufteilen und in die NF der anderen Ebene einsetzen
  - Parameter λ und μ fallen weg: a) falsches Ergebnis (z.B. 3 = 8) ⇨ Ebenen parallel
    b) wahres Ergebnis, z.B. (7 = 7) ⇨ Ebenen identisch
  - Parameter λ und/oder μ bleiben: Ergebnis nach einem Parameter auflösen und in PF einsetzen ⇨ Ergebnis ist die Schnittgerade

Beispiel: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $F: 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2 = 0$

- E aufteilen: $x_1 = 2 + \lambda + \mu$ und in F einsetzen: $F: 3(2+\lambda+\mu) - 2(4+2\lambda+3\mu) + 2(1+\lambda+2\mu) + 2 = 0$
  $x_2 = 4 + 2\lambda + 3\mu$ $\quad$ $F: 6+3\lambda+3\mu - 8-4\lambda-6\mu + 2+2\lambda+4\mu + 2 = 0$
  $x_3 = 1 + \lambda + 2\mu$ $\quad$ $F: 2 + \lambda + \mu = 0$ nach λ: $\lambda = -2 - \mu$
- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\mu - 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu - 2 + \mu \\ 4 - 2\mu - 4 + \mu \\ 1 - \mu - 2 + 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 - \mu \\ -1 + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittgerade von zwei Ebenen (beide in NF)

- Möglichkeit 1
  - Eine der Ebenen umwandeln in PF (siehe oben „NF in PF umwandeln“, S. 8)
  - Dann PF in NF einsetzen (siehe oben „Schnittgerade von zwei Ebenen (in NF und PF)“)
- Möglichkeit 2
  - Mit den beiden Ebenen in NF ein lineares Gleichungssystem (GLS) aufstellen
  - Da das GLS unterbestimmt ist (3 Unbekannte, aber nur 2 Gleichungen) ⇨ Eine der Unbekannten (hier x_2) durch einen Parameter (z. B. λ) ersetzen ⇨ Dieser bleibt am Schluss übrig für die Geradengleichung
  - Im GLS zuerst eine (hier x_1), dann die andere Unbekannte (hier x_3) eliminieren und jeweils nach der verbliebenen auflösen, sowie die dritte (hier x_2) überall durch λ ersetzen
  - Alle drei Unbekannten untereinander schreiben und daraus eine Geradengleichung bilden

Beispiel:	(I)	$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6 = 0$	
	(II)	$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0$	
x_1 eliminieren:	(I)-(II)	$0 - 2x_2 + 1x_3 - 2 = 0$	|auflösen nach x_3
		$x_3 = 2 + 2x_2$	| x2 durch λ ersetzen: $x_2 = \lambda$
		$x_3 = 2 + 2\lambda$	
x_3 eliminieren:	3·(I)	$6x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 18 = 0$	
	4·(II)	$-8x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 16 = 0$	
	3·(I)-4·(II)	$-2x_1 - 5x_2 + 0 - 2 = 0$	|auflösen nach x_1
		$-2x_1 = 2 + 5x_2$	| : (−2)
		$x_1 = -1 - 2{,}5x_2$	| x2 durch λ ersetzen
		$x_1 = -1 - 2{,}5\lambda$	

Geradengleichung:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 2{,}5\lambda \\ x_2 &= 0 + \lambda \\ x_3 &= 2 + 2\lambda \end{aligned} \quad ⇨ \quad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 - 2{,}5\lambda \\ 0 + \lambda \\ 2 + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Spurpunkte und Spurgeraden

Spurpunkte einer Ebene (auf den Achsen)

- Auf den Koordinatenachsen sind jeweils zwei der Koordinaten x_1, x_2 oder x_3 gleich 0
- Spurpunkt auf der x_1-Achse: x_2 und x_3 = 0 setzen
- Spurpunkt auf der x_2-Achse: x_1 und x_3 = 0 setzen
- Spurpunkt auf der x_3-Achse: x_1 und x_2 = 0 setzen

Spurgeraden einer Ebene (zwischen den Achsen)

- Spurgeraden sind die Verbindungsgeraden der Spurpunkte
- Spurpunkte berechnen (siehe oben) und aus jeweils 2 Punkten eine Geradengleichung aufstellen

Spurpunkte einer Geraden (mit den Koordinatenebenen)

- In den Koordinatenebenen ist jeweils eine Koordinate (x_1, x_2 oder x_3) = 0
- Diese Koordinate = 0 setzen und nach dem Parameter (z.B. μ) auflösen
- Das Ergebnis in den anderen beiden Koordinaten für μ einsetzen
- Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene: x_3 = 0 setzen
- Schnittpunkt mit der x_2x_3-Ebene: x_1 = 0 setzen
- Schnittpunkt mit der x_1x_3-Ebene: x_2 = 0 setzen

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ Für die x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$; ⇨ $x1 = 3 - 2\mu = 0$; ⇨ $\mu = 1{,}5$;

μ in x_2 ⇨ $x_2 = -2 + 1{,}5 \cdot 6 = 7$; μ in x_3 ⇨ $x_3 = 2 + 1{,}5 \cdot 2 = 5$; ⇨ Spurpunkt $S_{23}(0/7/5)$

Winkel berechnen

Ungleiche Objekte: Verwende **cos α** Gleiche Objekte: Verwende **sin α**

Winkel zwischen Vektoren/Geraden

Formel: $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix};$

$\cos\alpha = \frac{3\cdot1+(-2)\cdot4+2\cdot4}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{33}} = \frac{3}{\sqrt{17\cdot33}} \approx 0{,}127; \quad \alpha = \cos^{-1}(0{,}127) \approx 82{,}7°$

Winkel zwischen Ebenen

Formel: $\cos\alpha_{a,b} = \frac{\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$ Bsp: E_1: $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2 = 0$; E_2: $x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0$;

$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \cos\alpha_{E1,E2} = \frac{2\cdot1+(-3)\cdot2+1\cdot(-1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-5}{\sqrt{14\cdot6}} \approx -0{,}546; \quad \alpha = \cos^{-1}(0{,}546) \approx 123{,}1°$

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Formel: $\sin\alpha_{E,g} = \frac{\vec{n}\circ\vec{g}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{g}|}$ Bsp: E: $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2 = 0$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix};$

$\sin\alpha_{E,g} = \frac{2\cdot(-2)+(-3)\cdot6+2\cdot2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{44}} = \frac{-18}{\sqrt{17\cdot44}} \approx -0{,}658; \quad \alpha = \sin^{-1}(0{,}658) \approx -41{,}2°$