abi-kurs.de

Analysis-Skript

Cheat-Sheet

Kurvendiskussion

abi-kurs.de

Analysis-Skript

Cheat-Sheet Kurvendiskussion

Definitionsmenge *„Geben Sie die Definitionsmenge an“*

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ ⇨ $x \neq 0$ ⇨ Zum Lösen: Nenner = 0 setzen
⇨ Das Ergebnis ist aus der Def.menge <u>ausgeschlossen</u>

2) $f(x) = \sqrt{x}$ ⇨ $x \geq 0$ ⇨ Zum Lösen: Radikand ≥ 0 setzen (oder = 0 und Zahlenstrahl)
⇨ Das Ergebnis <u>ist</u> die Def.menge (mit Zahlenstrahl: Testwert einsetzen)

3) $f(x) = \ln(x)$ ⇨ $x > 0$ ⇨ Zum Lösen: Innere Funktion des ln > 0 setzen (oder = 0 und Zahlenstrahl)
⇨ Das Ergebnis <u>ist</u> die Def.menge (mit Zahlenstrahl: Testwert einsetzen)

Symmetrie *„Geben Sie das Symmetrieverhalten der Funktion an“*

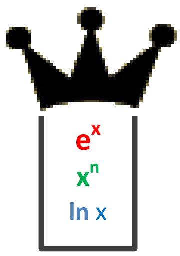
- -x in f(x) einsetzen, also f(-x) berechnen
- Umformen, so dass möglichst wieder genau f(x) entsteht
- Falls f(-x) = f(x) ⇨ Achsensymm. (bei ganzrat. Fkt. immer, wenn nur gerade Exponenten)
- Falls f(-x) = -f(x) ⇨ Punktsymm. (bei ganzrat. Fkt. immer, wenn nur ungerade Exponenten)
- Falls f(-x) ≠ f(x) ≠ -f(x) ⇨ <u>keine</u> Symm. (bei ganzrat. Fkt. immer, wenn gemischte Exponenten)

Nullstellen & Y_s *„Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen“*

- Nullstellen bedeutet: y = 0
    - f(x) = 0 setzen ⇨ x berechnen
    - Tipp: Bei gebrochen-rationalen Funktionen ist für die Nullstellen <u>nur der Zähler</u> relevant
- y-Achsen-Schnittpunkt Y_s bedeutet: x = 0
    - 0 in f(x) einsetzen ⇨ y = f(0) berechnen

Grenzwerte *„Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs“*

- Def.menge betrachten und die Ränder herauslesen (-∞ und +∞ sind <u>auch</u> Ränder, außerdem die Definitionslücken). x gegen diese Werte gehen lassen:
- x → ±∞: Grenzwerte im ∞ berechnen durch Zähler- & Nennergrad (alernativ: Einsetzen von ±∞)
    - ZG < NG x-Achse ist waagr. Asymptote, Gleichung: y = 0
    - ZG = NG Verschobene waagr. Asymptote, abzulesen aus den Koeffizienten vor den x mit der höchsten Potenz
    - ZG = NG + 1 Schräge Asymptote y = mx + t (über Polynomdivision[1])
- Beim Einsetzen von ∞ beachten: e^x stärker x^n stärker $\ln x$ (siehe Krone rechts)
- x → Definitionslücke: Grenzwerte an einer Def.lücke berechnen durch Einsetzen von Näherungswerten (z.B. 3,001 für $x \to 3^+$ und 2,999 für $x \to 3^-$)
- Falls die Def.lücke gleichzeitig Zählernullstelle ist ⇨ Behebbare Def.lücke ⇨ Loch



Umkehrfunktion

„Geben Sie an, ob die Funktion f(x) umkehrbar ist. Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.“

- Eine Funktion ist umkehrbar, wenn Sie in ganz D str. mon. fallend oder str. mon. steigend ist
    - Es dürfen in D keine Hoch-/Tiefpunkte existieren, da f(x) sonst steigend und fallend wäre
    - Zur Überprüfung: f '(x)=0 setzen etc.
- Berechnung von $f^{-1}(x)$: x und y vertauschen, nach y auflösen
- Def.menge und Wertemenge: Werden vertauscht: $D_{f-1} = W_f$, $W_{f-1} = D_f$

Stammfunktion

a) „Zeigen Sie, dass F(x) eine Stammfkt. von f(x) ist.“ b) „Geben Sie die Stammfkt. an, die durch P (2/4) verläuft.“

a) F(x) ableiten und so umformen, dass f(x) entsteht
b) Punkt P in die Stammfunktion einsetzen und dadurch die Konstante c bestimmen

---

[1] Polynomdivision: Eine Nullstelle des Terms erraten (durch Einsetzen ganzzahliger Teiler der letzten Zahl des Terms). Dann mit $(x - x_0)$ die Polynomdivision durchführen. Es bleibt ein Rest. Diesen auch notieren und durch $(x - x_0)$ teilen. Der Teil davor ist die schräge Asymptote – in der Form y = mx + t

Extrema & Monotonieverhalten

„Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte" bzw. „Untersuchen Sie das Monotonieverhalten"

- f '(x) berechnen und f '(x) = 0 setzen
- Ergebnis sind die x-Werte der Extrempunkte (x_E) (z.B. x_1= –3; x_2=3)
- Diese x_E in die erste Zeile der Monotonietabelle einsetzen
- Für die Spalten links und rechts von jedem x_E passende Testwerte verwenden (z.B. -5; 0; 5)
- Diese Testwerte in f '(x) einsetzen und lediglich berechnen, ob das Ergebnis + oder – ist
- + oder – in die Tabelle unterhalb der Testwerte eintragen, 0 unterhalb der x_E eintragen
- Pfeile eintragen: ↗ für streng monoton steigend, ↘ für streng monoton fallend
- Ergebnis: ↗ HOP ↘ oder ↘ TIP ↗ oder ↗ TEP ↗ oder ↘ TEP ↘
- Die zugehörigen y-Werte der Extrempunkte (y_E) berechnen
  ⇨ durch Einsetzen von x_E in die Originalfunktion f(x)
- Die Ergebnisse entsprechend als HOP(x_E/y_E), TIP(x_E/y_E), TEP(x_E/y_E) notieren, z.B. HOP(-3/2)

Alternativ zur Monotonietabelle

- Zusätzlich f ''(x) berechnen
- Die oben berechneten x-Werte x_E in f ''(x) einsetzen
  - Falls f ''(x_E) > 0 ⇨ TIP
  - Falls f ''(x_E) < 0 ⇨ HOP
  - Falls f ''(x_E) = 0 ⇨ TEP

Wendepunkte, Krümmung & Wendetangente

„Finden Sie den Wendepkt." „Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f". „Bestimmen Sie die Wendetangente".

- f ''(x) berechnen und f ''(x) = 0 setzen
- Ergebnis sind die x-Werte der Wendepunkte (x_W) (z.B. x_W = 0)
- Diese x_W in die Krümmungstabelle einsetzen
- Für die Spalten links und rechts von jedem x_W passende Testwerte verwenden (z.B. 2 und -2)
- Diese Testwerte in f ''(x) einsetzen und lediglich berechnen, ob das Ergebnis + oder – ist
- + oder – in die Tabelle unterhalb der Testwerte eintragen, 0 unterhalb der x_E eintragen
- Smilies eintragen: ☺ für + (positiv), ☹ für – (negativ)
- Am Mund der Smilies die Krümmung ablesen: ☺ = links-gekrümmt, ☹ = rechts-gekrümmt

x	x < 0 (-2)	x_W= 0	x > 0 (2)
f ''(x)	+	0	-
	☺	WP	☹
Krümmung	links	-	rechts

- Die zugehörigen y-Werte der Wendepunkte (y_W) berechnen
  ⇨ durch Einsetzen von x_W in die Originalfunktion f(x)
- Die Ergebnisse entsprechend als WP(x_W/y_W) notieren

Wendetangente: y = mx + t

- Bestimmung von m: x-Wert des WPs (x_W) in f '(x) einsetzen: m = f '(x_W)
- Bestimmung von t: y = mx + t nach t auflösen: t = y – mx
- x, y und m in t einsetzen
- Komplette Gleichung der Wendetangente notieren: m und t einsetzen (Bsp. WT: y = 2x + 4)